

Санкт-Петербургский государственный университет

СОНИНА Александра Константиновна
Выпускная квалификационная работа
Многообразия
Горески-Коттвица-Макферсона
и кольцо Чжоу симметрического
пространства E_6/F_4

Образовательная программа бакалавриат «Математика»

Направление и код: 01.03.01 «Математика»

Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:

доцент, к.ф.-м.н.

Петров Виктор Александрович

Рецензент:

Профессор,

Университет

Людвига и Максимилиана, Мюнхен,

Doktor der Mathematik

Семенов Никита Сергеевич

Санкт-Петербург

2020 год

Содержание

1	Введение	1
2	Графы и базисы	2
2.1	ГКМ-многообразия и графы	2
2.2	Дифференцирование расстановок многочленов на графе	2
2.2.1	Граф с действием группы Вейля	2
2.2.2	Дифференцирование на графе с действием группы Вейля	3
2.3	Построение ГКМ-графов	5
2.3.1	Описания алгоритмов	5
2.3.2	Построение графов	6
2.4	Базисы для ГКМ-графов	7
2.4.1	Общее описание построения flow-up базисов	7
2.4.2	Базис для графа $\bar{\Gamma}_2$	8
2.4.3	Flow-up базис для графа $\bar{\Gamma}_1$	9
3	Связь расстановок в разных графах	10
3.1	Построение отображения пушфорвард и разложение по flow-up базису	10
3.1.1	Построение отображения пушфорвард	10
3.1.2	Разложение по flow-up базису в графе $\bar{\Gamma}_1$	11
3.2	Связь расстановок, получающихся как образ пушфорварда, и всех правильных расстановок	12
4	Упрощение задачи и основная теорема	14
4.1	Переход от \mathbb{Z} к \mathbb{F}_2	14
4.2	Основная теорема	16

1 Введение

В данной работе мы применяем метод Горески-Коттвица-Макферсона [5] к вычислению колец Чжоу симметрических многообразий. Поскольку метод применим только к гладким полным многообразиям, необходимо выбрать эквивариантную компактификацию и исследовать разрешение особенностей ее границы. В этой работе разбирается случай симметрического пространства E_6/F_4 , группы Чжоу которого еще не были посчитаны в имеющейся литературе. Эквивариантные когомологии возникают у многообразия X с действием группы G (в нашем случае в качестве X берем E_7/P_7 и $E_6/P_{1,6}$, а G - это E_7 и E_6 соответственно). Хотим посчитать эквивариантные кольца Чжоу $CH_T^*(X)$, где T - максимальный тор в G . Известно [7], что E_6/F_4 есть E_6 -эквивариантная компактификация, которую можно отождествить с гладким гиперплоским сечением E_7/P_7 . Иначе говоря, имеется коммутативная диаграмма, строчка которой точна как последовательность локализаций, где Z - это $X \setminus (E_6/F_4)$, а \tilde{Z} - разрешение особенностей Z (иначе говоря, это гладкое многообразие бирационально эквивалентное Z). Это разрешение особенностей будет проективизацией некоторого векторного расслоения ранга 2 над $E_6/P_{1,6}$. Отметим, что такая же диаграмма есть и для не эквивариантных колец Чжоу.

$$\begin{array}{ccccccc}
 CH_T^{*-1}(\tilde{Z}) & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 CH_T^{*-1}(Z) & \longrightarrow & CH_T^*(X) & \longrightarrow & CH_T^*(E_6/F_4) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению образа пушфорварда эквивариантного морфизма двух гладких многообразий. По теореме Горески-Коттвица-Макферсона эта задача сводится к чисто комбинаторной о расстановке многочленов на ГKM-графе с условиями делимости, т. е. для всех пар вершин x, y смежных ребром (обозначим метку ребра l_i - некоторый линейный многочлен от корней системы Φ) верно, что $l_i | (P_x - P_y)$, где P_x, P_y - многочлены, записанные в соответствующих вершинах. В работе мы хотим установить связь между правильными расстановками многочленов в вершинах графов, построенных по ГKM-графам для многообразий E_7/P_7 (эта подгруппа получается как E_7/E_6 , где E_6 вложено в E_7 как первые 6 вершин) и $E_6/P_{1,6}$, на 54 и 540 вершинах. Для упрощения подсчетов мы построим базисы для правильных расстановок многочленов. Один из этих базисов (для 54-вершинного графа) будет flow-up базисом. Этот базис будет согласован с порядком на вершинах графа, благодаря чему можно будет эффективно раскладывать правильную расстановку по этому базису. После построения базисов (с помощью дифференциальных операторов на графах) мы посчитаем образ пушфорварда и разложим его по flow-up базису. После этого окажется, что можно выразить наоборот flow-up через образ пушфорварда и постоянную расстановку. А отсюда уже получается, что $CH_T^*(E_6/F_4) = CH_T^*(pt)$, а значит $CH^*(E_6/F_4) = \mathbb{Z}$

2 Графы и базисы

2.1 GKM-многообразия и графы

Эquivariantные когомологии возникают у многообразия X с действием группы G . Мы будем считать equivariantные кольца Чжоу $CH_T^*(X)$, где T - максимальный тор в G .

По многообразию X строим GKM-граф, вершины которого - это неподвижные точки под действием максимального тора T , а ребра - инвариантные прямые, проходящие через данные неподвижные точки. Метка на ребре будет равна фундаментальному весу, соответствующему этой инвариантной прямой.

Так же нужно понять как ориентированы ребра. Для этого рассматривается тор ранга 1 в общем положении. Запараметризуем этот тор параметром t . Теперь на каждой инвариантной прямой можно рассмотреть следующие пределы: зафиксируем некоторую точку x на прямой и пусть $p = \lim_{t \rightarrow 0}(tx)$ и $q = \lim_{t \rightarrow \infty}(tx)$. Такие две предельные точки будут неподвижными. Тогда поставим ориентацию на ребрах от предела в 0 к пределу к ∞ .

По теореме Горески-Коттвица-Макферсона элементы equivariantного кольца Чжоу задаются расстановками многочленов на GKM-графе с условиями делимости.

Определим условия делимости. Пусть $\{P_x\}$ - семейство многочленов, которые стоят в вершинах графа. Пусть на ребре xy стоит метка l_{xy} , тогда на этом ребре выполняется условие делимости, если $l_{xy} | (P_x - P_y)$. Расстановка будет называться правильной, если для каждого ребра выполняется условие делимости.

2.2 Дифференцирование расстановок многочленов на графе

2.2.1 Граф с действием группы Вейля

Определение. Система корней в евклидовом конечномерном пространстве V - это конечное множество ненулевых корней Φ удовлетворяющие следующим условиям

$$1 \ V = \text{span} \langle \Phi \rangle$$

$$2 \ \forall \alpha \in \Phi \text{ верно следующее } \{k\alpha | k \in \mathbb{R}\} \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$$

$$3 \ \forall \alpha, \beta \in \Phi \text{ верно, что } \sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi$$

$$4 \ \forall \alpha, \beta \in \Phi \text{ проекция } \beta \text{ на прямую, проходящую через } \alpha, - \text{ это полуцелое кратное } \alpha, \text{ иными словами } 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

Определение. Группа Вейля системы корней Φ - это группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных корням. Иными словами это группа $\langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Phi \rangle$

Рассмотрим граф $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$, в котором на каждом ребре написан какой-то корень из системы корней Φ . Зададим действие группы Вейля, построенной по системе корней Φ , на граф Γ следующим образом

- 1 Для $x \in V(\Gamma)$ $\sigma_\alpha(x) = y$, где $y = x$, если нет ребра из x с меткой α (или $-\alpha$) и $y = z$, если есть ребро xz с меткой α (или $-\alpha$)

- 2 Каждое ребро из G запараметризуем (x, y, β) , где ребро соединяет вершины x и y , а метка на ребре β . Тогда $\sigma_\alpha(x, y, \beta) = (\sigma_\alpha(x), \sigma_\alpha(y), \sigma_\alpha(\beta))$

Будем говорить, что граф Γ *выдерживает действие группы Вейля* W , если $\forall \sigma_\alpha \in W \forall (x, y, \beta) \in E(\Gamma) \sigma_\alpha(x, y, \beta) \in E(\Gamma)$.

2.2.2 Дифференцирование на графе с действием группы Вейля

Пусть у нас есть граф Γ , выдерживающий действие группы Вейля W . В каждой вершине стоят полиномы от корней Φ с условиями делимости, т. е. для всех ребер $(x, y, \beta) \in E(\Gamma)$ $\beta | (P_x - P_y)$ как полином.

Зададим оператор *дифференцирования по корню* α на этом графе так:

- 1 $(d_\alpha(P))_x = \frac{P_x - \sigma_\alpha(P_y)}{\alpha}$, если существует ребро $(x, y, \alpha) \in E(\Gamma)$ (или ребро с $-\alpha$)
- 2 $(d_\alpha(P))_x = \frac{P_x - \sigma_\alpha(P_x)}{\alpha}$, если не существует ребра $(x, y, \alpha) \in E(\Gamma)$ (или ребра с $-\alpha$)

Замечание 1. Отметим, что при дифференцировании правильной расстановки в вершинах остаются многочлены. Для каждого корня β $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$, где c - некоторая константа. Значит $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ по модулю α , а следовательно $P = \sigma_\alpha(P)$ по модулю α .

Теорема 1. Пусть P - правильная расстановка полиномов в графе Γ , выдерживающем действие группы Вейля W . Тогда $d_\alpha(P)$ тоже правильная расстановка

Доказательство. Проверим условие делимости на всех ребрах. Разберем 4 случая:

- 1 Делимость по ребру α . Сначала разберем случай, когда $P_y = 0$. Тогда $P_x = \alpha Q_x$, а значит $(d_\alpha(P))_x = Q_x$, а $(d_\alpha(P))_y = \sigma_\alpha(Q_x)$, поскольку $\sigma_\alpha(P_x) = -\alpha\sigma_\alpha(Q_x)$ и условие делимости есть. Теперь произвольный случай сводится к этому переходом от P_x, P_y к $P_x - P_y, 0$. Поскольку $d_\alpha(-)$ линейный оператор, то переход корректен.
- 2 Делимость по ребру β , оба конца которого имеют ребро с меткой α . Пусть концы ребра β - это x и y , концы ребер α смежных с x, y - это u, v соответственно. Тогда между uv есть ребро с меткой $\sigma_\alpha(\beta)$ (поскольку граф выдерживает действие группы Вейля). Опять же воспользуемся линейностью и занулим вершину y , тогда $P_x = \beta Q_x$, $P_v = \alpha Q_v$. После дифференцирования в вершинах x, y, u, v будут записаны соответственно следующие полиномы: $\frac{\beta Q_x - \sigma_\alpha(P_u)}{\alpha}$, $\sigma_\alpha(Q_v)$, $\frac{P_u - \sigma_\alpha(\beta Q_x)}{\alpha}$, Q_v . Значит нам нужно доказать, что есть делимость $\beta | (\frac{\beta Q_x - \sigma_\alpha(P_u)}{\alpha} - \sigma_\alpha(Q_v))$, поскольку НОД(α, β) = 1, то можно домножить полином справа на α и доказывать делимость на β такого полинома. $-\sigma_\alpha(P_u) - \alpha\sigma_\alpha(Q_v) = \sigma_\alpha(\alpha Q_v) - \sigma_\alpha(P_u) = \sigma_\alpha(P_v - P_u)$. Полином $P_v - P_u$ делится на $\sigma_\alpha(\beta)$, а значит $\sigma_\alpha(P_v - P_u)$ делится на $\sigma_\alpha(\sigma_\alpha(\beta)) = \beta$, что мы и хотели.
- 3 Делимость по ребру β , ровно один из концов которого имеет ребро с меткой α . Пусть концы ребра β - это x и y , а конец ребра α смежного с y - z . Тогда поскольку граф выдерживает действие группы Вейля, то существует ребро xz с меткой $\sigma_\alpha(\beta)$. Опять по линейности занулим вершину y , тогда в вершинах x, z стоят полиномы $\beta Q_x, \alpha Q_z$ соответственно. После дифференцирования в вершинах x, y будут стоять полиномы $\frac{P_x - \sigma_\alpha(P_x)}{\alpha}, \sigma_\alpha(Q_z)$ соответственно. Докажем делимость $\beta | (\frac{\beta Q_x - \sigma_\alpha(P_x)}{\alpha} - \sigma_\alpha(Q_z))$. Аналогично, домножим на α .

$-\sigma_\alpha(P_x) - \alpha\sigma_\alpha(Q_z) = \sigma_\alpha(P_z - P_x)$. Аналогично, $P_z - P_x$ делится на $\sigma_\alpha(\beta)$, а значит $\sigma_\alpha(P_z - P_x)$ делится на β .

- 4 Делимость по ребру β , ни один из концов которого имеет ребро с меткой α . Пусть концы ребра β - это x и y . Тогда поскольку граф выдерживает действие группы Вейля, то между вершинами есть ребро с меткой $\sigma_\alpha(\beta)$, поэтому $P_x - P_y$ делится на $\sigma_\alpha(\beta)$, или же $\sigma_\alpha(P_x - P_y)$ делится на β . После дифференцирования нужно понять, что $\beta | (\frac{P_x - \sigma_\alpha(P_x)}{\alpha} - \frac{P_y - \sigma_\alpha(P_y)}{\alpha})$. Аналогично, домножим на α и получим сумму двух разностей, которые делятся.

□

Пушфорвард будет определен в параграфе 3.1.1. Здесь напомним, что формула пушфорварда это $f_*(Q)_w = P_w = \sum Q_v \frac{h(w)}{h(v)}$, где сумма берется по всем прообразам вершины w и докажем следующую теорему для пушфорвардов, которые согласованы с действием группы W (те $f_*(\sigma_\alpha x) = \sigma_\alpha f_*(x)$ для всех вершин x).

Теорема 2. Пусть P - правильная расстановка многочленов, тогда $f_*(d_\alpha P) = d_\alpha f_*(P)$

Доказательство. Проверим это равенство в каждой вершине x . Разберем два случая

- 1 Вершина x не имеет ребра α . Тогда все ребра α , выходящие из вершин, которые являются прообразами x , входят в вершины, которые являются прообразами x . Тогда $f_*(d_\alpha P)_x = \sum \frac{P_w - \sigma_\alpha(P_w)}{\alpha} \frac{h(x)}{h(w)} + \sum \frac{P_v - \sigma_\alpha P_u}{\alpha} \frac{h(x)}{h(w)}$, где первая сумма по не имеющим ребра с α , а вторая по имеющим. Заметим, что поскольку x неподвижна под действием σ_α , значит $\sigma_\alpha h(x) = h(x)$, а если под действием σ_α v переходит в u , то $\sigma_\alpha h(v) = h(u)$. d_α - линейный, поэтому $d_\alpha f_* P = d_\alpha (\sum P_w \frac{h(x)}{h(w)}) = \sum d_\alpha ((P_w) \frac{h(x)}{h(w)}) = \sum \frac{P_w - \sigma_\alpha P_w}{\alpha} \frac{h(x)}{h(w)} + \sum \frac{P_v - \sigma_\alpha P_u}{\alpha} \frac{h(x)}{h(v)}$ (привели все слагаемые к одинаковым $\frac{h(x)}{h(w)}$ и получили такое же выражение).
- 2 Пусть x смежна с y ребром с меткой α . Поскольку пушфорвард выдерживает действие α , то все прообразы x при действии σ_α переходят в прообразы y . Пусть v - прообраз x , а u - прообраз y , в который переходит v . Тогда $f_*(d_\alpha P)_x = \sum \frac{P_v - \sigma_\alpha P_u}{\alpha} \frac{h(x)}{h(v)}$. С другой стороны, $d_\alpha(f_* P)_x = \frac{(\sum P_v \frac{h(x)}{h(v)}) - \sigma_\alpha(\sum P_u \frac{h(y)}{h(u)})}{\alpha} = \sum \frac{P_v - \sigma_\alpha(P_u)}{\alpha} \frac{h(x)}{h(v)}$.

□

2.3 Построение GKM-графов

2.3.1 Описания алгоритмов

В нашей работе нам необходимо построить GKM-графы для E_7/P_7 (P_7 - это параболическая подгруппа с группой Леви типа E_6 , получающаяся из E_7 удалением одной из крайних вершин) и для $E_6/P_{1,6}$ ($P_{1,6}$ - это параболическая подгруппа с группой Леви типа D_4 , получаемая из E_6 удалением 2 крайних вершин). Следуя статье J.S.Тумосзко [3] необходимо построить систему представителей классов смежности соответствующих групп Вейля, минимальных по длине. Алгоритм построения таких представителей описан в статье Н.Duan и X.Zhao [1]. Опишем его и тут.

Назовем образующие групп s_i . Пусть ω_i - фундаментальные веса для группы Вейля. $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ - матрица Картана.

Для начала определим $\sigma_i(\omega_j)$ следующим образом

$$\begin{aligned} 1 & \omega_j, \text{ если } i \neq j \\ 2 & \omega_i - \sum_{1 \leq j \leq n} c_{ij} \omega_j, \text{ если } i = j \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $\delta = \omega_1 + \dots + \omega_n$. Считая, что $\sigma_{s_i} = \sigma_i$, посчитаем $w(\delta) = b_1 \omega_1 + \dots + b_n \omega_n$. Пусть $b : W \rightarrow \mathbb{Z}^n$ - отображение, которое задаётся так $b(w) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Назовем b *числовой записью*.

Утверждение. Отображение b инъективное и $\forall w \in W$ и $1 \leq j \leq n$ верно, что $b_j \neq 0$

Сформулируем алгоритм вычисляющий $b(w)$ по w

Алгоритм 1. Подсчет $b(w)$

Ввод: $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$

Вывод: $(b_1, b_2, \dots, b_n) = b(w)$ для $w = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$

Начинаем с суммы $p_0 = \omega_1 + \dots + \omega_n$

Шаг 1: подставляем вместо ω_{i_k} $\omega_{i_k} - \sum_{1 \leq j \leq n} c_{i_k j} \omega_j$ и получаем p_1

\vdots

Шаг m : подставляем вместо $\omega_{i_{k+1-m}}$ $\omega_{i_{k+1-m}} - \sum_{1 \leq j \leq n} c_{i_{k+1-m} j} \omega_j$ и получаем p_m

\vdots

Шаг k : подставляем вместо ω_{i_1} $\omega_{i_1} - \sum_{1 \leq j \leq n} c_{i_1 j} \omega_j$ и получаем p_k

Шаг $k+1$: если $p_k = b_1 \omega_1 + \dots + b_n \omega_n$, то $b(w) = (b_1, \dots, b_n)$

Теперь пусть у нас даны две группы Вейля W и W' , притом $W = \langle \sigma_{s_1}, \dots, \sigma_{s_n} \rangle$, а $W' = \langle \sigma_{s_{i_1}}, \dots, \sigma_{s_{i_k}} \rangle$. Мы хотим построить множества $\bar{W}^k = \{w \in \bar{W} | l(w) = k\}$, где \bar{W} - система представителей классов смежности W/W' с минимальной длиной, а $l(w)$ - длина. Ясно, что $\bar{W}^0 = e$, а $\bar{W}^1 = \{\sigma_j | \forall 1 \leq m \leq k, j \neq i_m\}$.

Алгоритм 2. Построение \bar{W}^k для всех k

Ввод: множество \bar{W}^{k-1} , каждый элемент которого представлен в виде приведенного произведения $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$

Вывод: множество \bar{W}^k , каждый элемент которого представлен в виде приведенного произведения $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$

Пусть $V = \{1, 2, \dots, n\} \times \bar{W}^{k-1}$. Присвоим $S = \emptyset$ и $R = \emptyset$

Шаг 1: для $v = (i, \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}) \in V$ присвоим $w = \sigma_i \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$

Шаг 2: с помощью алгоритма 1 вычисляем $b(w) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ и $b(w^{-1}) = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$

Шаг 3: если выполнено

1 $b_i < 0$

2 $\forall i_k$ таких, что $\sigma_{i_k} \in W$ $\bar{b}_{i_k} > 0$

3 $(b_1, b_2, \dots, b_n) \notin R$

то добавляем $\sigma_i \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$ в S , а $b(w) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ в R .

В конце, присваиваем $\bar{W}^k = S$

Отметим, что алгоритм 2 запускается до тех пор, пока новое \bar{W}^k не окажется пустым множеством. После этого все $\bar{W}^m = \emptyset \forall m \geq k$.

2.3.2 Построение графов

Теперь построим GKM - графы для многообразий E_7/P_7 и $E_6/P_{1,6}$. Вершинами будут элементы $\bar{W} = \coprod \bar{W}^k$. Добавим для начала ребра, которые получаются из алгоритма (те ребра с метками α_i из вершины $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$ в вершину $\sigma_i \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$). Это будут простые ребра. Теперь просто добавляем все ребра, чтобы граф стал выдерживать действие группы Вейля. Отметим, что $\sigma_{a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n} (b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n) = b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n - 2 \frac{(a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n, b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n)}{(a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n, a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n)} (a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n)$, где $(\alpha_i, \alpha_j) = c_{ij}$.

Отметим, что мы получили ориентированный граф, т. е. на вершинах можно ввести порядок, т. е. вершина $w \geq w'$, если есть ориентированный путь от w к w' .

Таким образом получаем два графа Γ_1 для E_7/P_7 и Γ_2 для $E_6/P_{1,6}$. Количество вершин в Γ_1 - 56, а в Γ_2 - 270 вершин.

Теперь сделаем сужение E_7/P_7 на гиперплоскость в 27-мерном пространстве, описывающуюся следующим образом: координата при векторе веса ω_7 равна координате при векторе веса $-\omega_7$. Таким образом, граф Γ_1 преобразуется в граф $\bar{\Gamma}_1$, в котором удалены вершины e (наибольшая вершина) и противоположная ей (наименьшая вершина), а так же на ребрах есть условие $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 = 0$ (иначе говоря, пространство весов надо отфакторизовать по соотношению $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 = 0$).

Построим новый граф $\bar{\Gamma}_2$ как удвоение графа Γ_2 . Иначе говоря, все вершины - это (i, w) , где w - слово, написанное в вершине графа Γ_2 , а $i \in \{1, 2\}$. Построим ребра в этом графе. Внутри доли с $i = 1$ или $i = 2$ ребра будут совпадать с ребрами в графе Γ_2 , а ребра между $(1, w)$ и $(2, w)$ считаются так: на ребре $(1, e)(2, e)$ ставим метку $\alpha_2 + \alpha_5$, а дальше для $(1, w)(2, w)$ мы применяем $\sigma_{\alpha_{i_1}} \dots \sigma_{\alpha_{i_k}}$ к метке между $(1, e)(2, e)$, если $w = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$

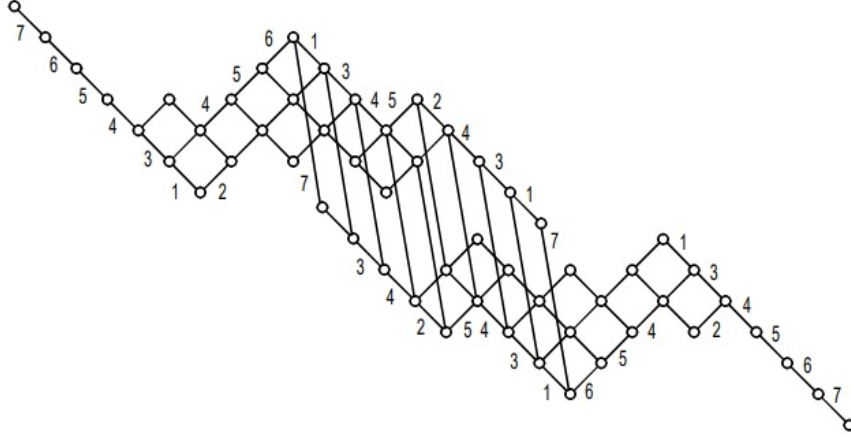


Рис. 1: Граф на 56 вершинах. Рисунок взят из [10]

2.4 Базисы для ГКМ-графов

2.4.1 Общее описание построения flow-up базисов

Как мы уже определяли выше, на вершинах графов можно завести частичный порядок. Будем говорить, что $w \geq w'$, если существует ориентированный путь из вершины w в w' .

Определение. Будем называть систему правильных расстановок многочленов *flow-up базисом*, если

- 1 Эта система расстановок - базис (те эта система линейно независима и любая правильная расстановка является линейной комбинацией данных с коэффициентами полиномами от корней системы Φ)
- 2 Все многочлены, записанные в вершинах, однородные и степени всех ненулевых многочленов во всех вершинах равны фиксированной для данной расстановки константе.
- 3 Для всех вершин w существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине w стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах v с $v \geq w$.

Поскольку чтобы перейти к гиперплоскому сечению E_7/P_7 , надо профакторизовать по соотношению $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7$, нужно ввести новый порядок на корнях, который будет с этим соотношением совместим.

Чтобы это сделать нужно найти такой вектор v , что $(v, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7) = 0$ и $(v, a_1\alpha_1 + \dots + a_7\alpha_7) \neq 0$ для всех ребер графа. После этого смотрим на

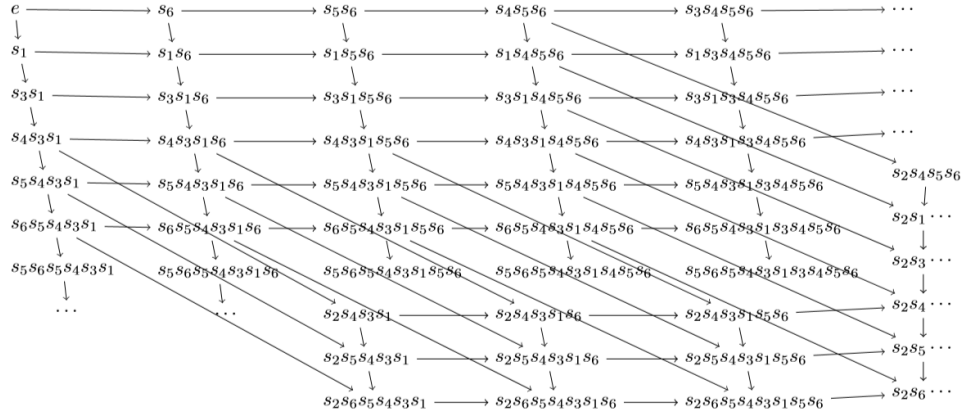


Рис. 2: Начало графа на 270 вершинах

знак $(v, a_1\alpha_1 + \dots + a_7\alpha_7)$. Если $(v, a_1\alpha_1 + \dots + a_7\alpha_7) > 0$, то оставляем ребро как оно есть, если $(v, a_1\alpha_1 + \dots + a_7\alpha_7) < 0$, то меняем ориентацию ребра. Иначе говоря, добиваемся того, чтобы на ребрах были записаны положительные корни. После этого находим новый порядок на вершинах и новые простые ребра (это будет 7 положительных корней, которые линейно независимы и минимальные по $(v, -)$)

Теперь опять же следуя статье [3], мы сможем построить flow-up базисы, для графов выдерживающих действие группы Вейля.

Алгоритм 3. Построение flow-up базиса

Ввод: ориентированный граф с выделенными ребрами, соответствующими простым корням

Вывод: система правильных расстановок многочленов, которая является flow-up базисом

Заведём два множества $S = \emptyset$ и $K = \emptyset$.

Шаг 1: Поставим в наибольшую вершину произведение всех меток на ребрах, выходящих из этой вершиной, а в остальные вершины нули. Записываем эту расстановку в S . Заносим все вершины, смежные с наибольшей простым ребром, вместе с расстановкой в множество K

⋮

Шаг m : выбираем вершину $w \in K$ и удаляем ее из множества K (те удаляем все пары, в которых есть w). Продифференцируем расстановку из пары с w по ребру, по которому мы пришли в w . Заносим эту расстановку в S . Вершины, в которые мы можем перейти по простым ребрам из w , вместе с этой расстановкой заносим в K

⋮

Когда K снова становится пустым, то алгоритм заканчивается. Искомое семейство будет S

2.4.2 Базис для графа $\bar{\Gamma}_2$

Теперь достроим до базиса для 540-вершинного графа. Для начала добавим расстановки, которые являются удвоением flow-up базисов для 270-вершинного графа.

После этого необходимо добавить недостающую образующую группы Пикара (расстановок степени 1). Зануляем вторую долю, после этого однозначно (с точностью до константы) восстанавливаются многочлены в вершинах $(1, w)$ (записываем в $(1, w)$ многочлен, равный метке на ребре $(1, w)(2, w)$). Обозначим эту расстановку за P . Теперь добавим к уже построенным 270 расстановкам эти же расстановки домноженные на P . Эти 540 расстановок будут базисом для графа $\bar{\Gamma}_2$.

2.4.3 Flow-up базис для графа $\bar{\Gamma}_1$

Построим flow-up базис для 54-вершинного графа.

Определение. Отображение *пушфорвард* из расстановок на графе Γ_1 в расстановки на графе $\bar{\Gamma}_1$ будем строить следующим образом: для первых 27 вершин по первому порядку на графе Γ_1 (иначе говоря, это первая компонента связности порядка 27 в графе Γ_1 с простыми ребрами после удаление всех ребер α_7) многочлены в этих вершинах делим на метку на ребре, которым они соединяются с вершиной e , а для следующих 27 вершин (вторая компонента связности порядка 27) многочлены в этих вершинах поделим на метку с ребра, которым они соединены с наименьшей вершиной в исходном порядке.

Определение. Отображение *пулбэк* из расстановок на графе Γ_1 в расстановки на графе $\bar{\Gamma}_1$ будем строить так: для многочленов в вершинах $\bar{\Gamma}_1$ многочлен не изменяется, т. е. формально просто удаляются 2 вершины.

Замечание 2. Под действием отображений пушфорвард и пулбэк правильная расстановка (для которой корректно определено отображение) переходит в правильную.

Чтобы это сделать необходимо для расстановок степеней хотя бы 14 сделать пушфорвард из 56-вершинного графа в 54-вершинный, а для степеней не больше 13 сделать пулбэк. Для одной из расстановок степени 14 отображение пушфорварда не определено, эту расстановку просто забываем. Так же для одной из расстановок степени 13 не будет выполнено, что есть такая вершина w , для которой выполняется условие (3) для этой расстановки, поэтому эту расстановку можно выразить через остальные, т. е. эта расстановка не будет входить во flow-up базис.

3 Связь расстановок в разных графах

3.1 Построение отображения пушфорвард и разложение по flow-up базису

3.1.1 Построение отображения пушфорвард

Построим отображение *пушфорвард*, которое по правильной расстановке вершин в 540-вершинном графе строит правильную расстановку 54-вершинного графа.

Для начала построим отображение вершин. Пусть $[w']$ - класс w' в фактор-группе $W(E_7)/W(E_6)$. Вершины $(1, w)$ переходят в $[w\sigma_7]$, а вершина $(2, w)$ переходит в $[ww']$, где w' - наибольшая вершина во второй компоненте связности из 27 вершинах (в графе с простыми ребрами после удаления ребра α_7). Оказывается, что у каждой вершины из 54 в графе $\bar{\Gamma}_1$ есть ровно 10 прообразов в 540-вершинном, притом из первых 27 вершинах прообразы лежат в первой доле из 270 вершин, а из последних 27 прообразы лежат во второй доле. Отметим, что построенный пушфорвард согласован с действиями групп Вейля, поэтому применима теорема 2.

Так же построим отображение *пуллбэк*, которое по правильной расстановке в 54-вершинном графе строит правильную расстановку в 540-вершинном. Поставим в вершину x многочлен, стоящий в вершине, в которую переходит x при пушфорварде. Из того, что пушфорвард согласован с действием групп Вейля, то расстановка после пуллбэка будет правильной.

Отметим, что благодаря инъективности числовой записи $b : W(E_7)/W(E_6) \rightarrow \mathbb{Z}^7$, которое вычисляется как $b(w) = w(\omega_7)$, мы можем эффективно определить класс слова.

Алгоритм 4. Вычисление $[w]$ для произвольного слова

Ввод: слово w , которое представлено в виде произведения $w = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$

Вывод: класс $[w]$, представленный в виде $[w] = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_m}$

Шаг 1 : Для каждой вершины w' графа $\bar{\Gamma}_1$ вычисляем $b(w')$ с помощью алгоритма 1

Шаг 2: Вычисляем с помощью алгоритма 1 $b(w)$

Шаг 3: Ищем w' среди вершин графа $\bar{\Gamma}_1$, такую что $b(w) = b(w')$

w' - это и есть искомый класс

Теперь определим операцию пересчета многочленов. $f_*(Q)_w = P_w = \sum Q_v \frac{h(w)}{h(v)}$, где сумма берется по всем прообразам вершины w , а $h(w)$ - произведение меток на ребрах входящих (они берутся со знаком -) и выходящих (они берутся со знаком +) из вершины w .

Докажем еще одну полезную формулу связи пушфорварда и пуллбэка, которая называется формулой проекции.

Лемма 1. Пусть f_* - пушфорвард, а f^* - пуллбэк. Тогда для правильных расстановок P и Q верна формула $f_*(f^*(P)Q) = Pf_*(Q)$

Доказательство. Проверим формулу для каждой вершины x из графа на 54-вершинах $f_*(f^*(P)Q)_x = \sum P_x Q_w = P_x \sum Q_w = (Pf_*(Q))_x$

□

3.1.2 Разложение по flow-up базису в графе $\bar{\Gamma}_1$

Напишем алгоритм, с помощью которого можно будет разложить любую правильную расстановку многочленов по flow-up базису.

Алгоритм 5. Разложение правильной расстановки P по flow-up базису

Ввод: Набор полиномов $\{P_w\}$, которые образуют правильную расстановку

Вывод: Набор полиномов (c_j) таких, что $P_w = \sum_j c_j (flow_j)_w$ для всех w - вершин

графа $\bar{\Gamma}_1$

Шаг 1: Находим минимальную вершину w (любую) такую, что $P_w \neq 0$

Шаг 2: Выбираем $flow_j$, соответствующий вершине w . Поскольку есть условие (3) для flow-up базисов, то существует полином c_j , такой что $P_w = c_j (flow_j)_w$

Шаг 3: Заменяем расстановку P на $P - c_j flow_j$ и запускаем дальше с шага 1, если $P \neq 0$

Отметим, что из-за специфики flow-up базиса мы не будем заикливаться. Т. е. когда мы делаем переход от P к $P - c_j flow_j$ мы оставляем нулями все вершины на уровнях ниже вершины w , а так же не изменяем многочлены в вершинах одного ранга с w (рангом будем называть длину кратчайшего пути из наибольшей вершины в данную по простым ребрам).

3.2 Связь расстановок, получающихся как образ пушфорварда, и всех правильных расстановок

В параграфах выше мы научились выражать образ пушфорварда через flow-up базис. Обозначим это разложение так $P_i = \sum_j c_{ij} flow_j$. Заметим, что если $c_{ij} \neq 0$, то $deg(P_i) \geq deg(flow_j)$. Построим для фиксированной степени расстановок k матрицу $C_k = (c_{ij})$ где c_{ij} - коэффициенты при разложении P_i на $flow_j$, если $deg(P_i) = deg(flow_j) = k$ (те мы перенумеруем все многочлены, получающиеся пушфорвардом, и flow-up базисы степени k и запишем нужные коэффициенты).

Основной результат нашей работы - это установление связи между расстановками, получающимися пушфорвардом, и всеми правильными расстановками. Хотим доказать, что пушфорвард почти сюръективен, т. е. все правильные расстановки получаются как линейная комбинация образа пушфорварда и постоянной расстановки.

Чтобы это понять нужно выразить каждый элемент $flow_j$, кроме расстановки из всех единиц, через P_i и всех единиц. Для этого проверим что все матрицы C_k являются матрицами полного ранга. Перейдем к коэффициентам из поля \mathbb{F}_2 и получаем следующую теорему

Теорема 3. *Все расстановки $flow_j$ выражаются через P_i и постоянной расстановки*

Доказательство. Доказываем индукцией по степени $flow_j$. База $deg = 0$ очевидна

Переход: пусть для степеней $m < k$ выражается, выразим для степени k . В разложении P_i все $flow_j$ со степенью меньше k выражаем через расстановки, получающиеся из пушфорварда и постоянной. Получаем систему линейных уравнений $\sum_j c_{ij} flow_j = Push_i$. Поскольку матрица $C_k = (c_{ij})$ полного ранга, то существует матрица $D = (d_{ikj})$ такая, что $flow_j = \sum_i d_{ikj} Push_{i_k}$, что собственно мы и хотели \square

Теорема 3 получается из программ, которые находятся по ссылкам.

На самом деле будет выполнено более сильное утверждение для многочленов над полем \mathbb{F}_2 .

Утверждение. Для каждого элемента $flow_j$, не являющегося расстановкой из всех 1, будет существовать элемент $Push_i$ такой, что $deg(flow_j) = deg(Push_i)$ и в разложении $Push_i$ по flow-up базису коэффициенты $c_{ik} = \delta_{j,k}$

Какие именно расстановки будут соответствовать базису можно посмотреть в приложении.

Лемма 2. $CH_T^*(E_6/F_4) \otimes \mathbb{F}_2 = CH_T^*(pt) \otimes \mathbb{F}_2$

Доказательство. Исходя из следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 CH_T^{*-1}(\tilde{Z}) \otimes \mathbb{F}_2 & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 CH_T^{*-1}(Z) \otimes \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & CH_T^*(X) \otimes \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & CH_T^*(E_6/F_4) \otimes \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

получаем, что нам необходимо посчитать ядро стрелки $(CH_T^*(X) \otimes \mathbb{F}_2, CH_T^*(E_6/F_4) \otimes \mathbb{F}_2)$. Из точности следует, что нужно посчитать образ стрелки $(CH_T^{*-1}(Z) \otimes \mathbb{F}_2, CH_T^*(X) \otimes \mathbb{F}_2)$, а из коммутативности диаграммы, что он содержит образ стрелки $(CH_T^{*-1}(\tilde{Z}) \otimes \mathbb{F}_2, CH_T^*(X) \otimes \mathbb{F}_2)$. По теореме 3, в образе этой стрелки лежат все базисные расстановки, кроме расстановки из всех 1, а значит все расстановки кроме постоянных лежат в ядре стрелки. Значит $CH_T^*(E_6/F_4) \otimes \mathbb{F}_2 = CH_T^*(pt) \otimes \mathbb{F}_2$ \square

4 Упрощение задачи и основная теорема

4.1 Переход от \mathbb{Z} к \mathbb{F}_2

Чтобы реализовать эти вычисления нам необходимо перейти к конечному полю, а именно мы поймем, что нам достаточно доказать теорему выше для многочленов над полем \mathbb{F}_2 .

Для начала заметим, что для перехода к полю F необходимо рассматривать $CH_T^*(X) \otimes F$. Эта операция меняет коэффициенты многочленов на коэффициенты из поля F . Если мы рассмотрим $CH_T^*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, то в кольце коэффициентов можно будет обращать 2.

Рассмотрим $M = \text{Coker}(CH_T^{*-1}(\tilde{Z}) \rightarrow CH_T^*(X))/\text{Im}(\text{const})$, иначе говоря берем фактор коядра по образу постоянной расстановки при переходе от расстановок к элементам кольца $CH_T^*(X)$.

Лемма 3. $M \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = 0$

Доказательство. Поскольку у нас есть формула проекции $f_*(f^*(P)Q) = Pf_*(Q)$ для любых правильных расстановок P и Q , то образ при пушфорварде - это идеал.

Поскольку $f_*(1) = h$ (где h — это образующая $CH_T^1(X)$), то все элементы, делящиеся на h , лежат в образе пушфорварда.

Элементы у нас следующие (описывали выше в параграфе 2.4.3): пуллбэки элементов $CH^*(E_7/P_7)$ коразмерности до 13 и те, пушфорварды которых дают элементы $CH^*(E_7/P_7)$ коразмерности, начиная с 14.

Про кольцо $CH^*(E_7/P_7)$ известно [9] следующее: оно порождается мультипликативно H (образующей в CH^1), и некоторыми элементами x_5 и x_9 в 5-й и 9-й коразмерности соответственно. При этом видно (по построению пуллбэка), что H при пуллбэке переходит в h . Так что проверять достаточно пуллбэк x_5 , пуллбэк x_9 и тот, который переходит при пушфорварде в x_5x_9 .

Пуллбэки x_5 и x_9 получаются дифференциальными операторами из элементов, которые делятся на h , поскольку в коразмерности 6 все элементы делятся на h , а в коразмерности 10 единственный возможный не делящийся элемент - это $f^*(x_5^2) = f^*(2Hx_9) = 2hf^*(x_9)$ и все равно получается делящийся, а из того, что flow-up - это базис и получается дифференцированием из коразмерности большей степени следует, что $f^*(x_5), f^*(x_9)$ выражаются через дифференциальные операторы. Поэтому они лежат в образе пушфорварда, так как дифференцирование можно проносить через пушфорвард.

Для элементов вида $x_5^l x_9^m$ если $l > 1$ или $m > 1$, то пуллбэк этого элемента делится на h , поскольку есть формулы, которые выражают квадраты x_5 и x_9 через элементы, делящиеся на H , поэтому для них тоже верно, что они лежат в образе пушфорварда.

Таким образом, достаточно исследовать единственный элемент x_5x_9 . Из формулы $2x_5x_9 = 9H^4x_5^2 - 6H^9x_5 + H^{14}$ для E_7/P_7 следует только, что он удвоенный делится на h . Поскольку 2 обратимый элемент в $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, то на 2 в формуле можно поделить, а значит все элементы, кроме постоянного, лежат в образе пушфорварда. Поэтому $M = 0$.

Отметим, что в статье разбираются не эквивариантные кольца. Но переход будет происходить путем добавления к x_5 и x_9 элементов меньшей коразмерности (для x_5 -

это элементы, делящиеся на H , а для x_9 - это элементы, делящиеся на H и cx_5 , где c - константа) поэтому переход от не эквивариантных к эквивариантным корректен. \square

Из леммы 2 видно, что $M \otimes \mathbb{F}_2 = 0$, а значит $M = 0$, что нам и было необходимо.

4.2 Основная теорема

Сформулируем и докажем окончательный вывод данной работы

Теорема 4. $CH_T^*(E_6/F_4) = CH_T^*(pt)$

Доказательство. Исходя из следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 CH_T^{*-1}(\tilde{Z}) & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 CH_T^{*-1}(Z) & \longrightarrow & CH_T^*(X) & \longrightarrow & CH_T^*(E_6/F_4) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

получаем, что нам необходимо посчитать ядро стрелки $(CH_T^*(X), CH_T^*(E_6/F_4))$. Из точности следует, что нужно посчитать образ стрелки $(CH_T^{*-1}(Z), CH_T^*(X))$, а из коммутативности диаграммы, что он содержит образ стрелки $(CH_T^{*-1}(\tilde{Z}), CH_T^*(X))$. Из параграфа 4.1 получаем, что $M = 0$, а значит все расстановки кроме постоянных лежат в ядре стрелки. Значит $CH_T^*(E_6/F_4) = CH_T^*(pt)$ \square

Следствие. $CH^*(E_6/F_4) = \mathbb{Z}$

Приложение

Выпишем необходимое соответствие. Слева будет последовательность дифференцирований, которыми получается соответствующий элемент flow-up базиса, а справа сначала 1 или 2, в зависимости от того, берем мы удвоение flow-up базиса или flow-up базис умноженный на элемент группы Пикара. Если справа или слева стоит пустая строка, значит дифференцирования не происходило. Если справа стоит -1, то прообраз не найден (такая строчка ровно 1, соответствующая расстановке из всех 1). α_i - исходные простые корни, а β_j - простые корни, после переподвешивания. Они будут выражаться друг через друга над \mathbb{F}_2 следующим образом

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7$$

$$\beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\beta_4 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_7$$

$$\beta_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6$$

$$\beta_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7$$

$$\beta_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$$

: 2—

$$d_{\beta_4} : 2 - d_{\alpha_6}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} : 2 - d_{\alpha_6} d_{\alpha_5}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} : 2 - d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} : 2 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} : 1 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_5} : 2 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_5} d_{\beta_1} : 1 - d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_2} d_{\alpha_4}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} : 2 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_5} d_{\beta_1} d_{\beta_7} : 1 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} d_{\beta_3} : 2 - d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_2} d_{\alpha_4} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_5} d_{\beta_1} d_{\beta_7} d_{\beta_3} : 2 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_3}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} d_{\beta_3} d_{\beta_6} : 2 - d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_2} d_{\alpha_4} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5} d_{\alpha_6}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_5} d_{\beta_1} d_{\beta_7} d_{\beta_3} d_{\beta_6} : 1 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} d_{\beta_3} d_{\beta_6} d_{\beta_2} : 1 - d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_6}$$

$$d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} d_{\alpha_4} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5} d_{\alpha_6} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_2} d_{\alpha_1} d_{\alpha_6} d_{\alpha_5} d_{\alpha_3} d_{\alpha_4} d_{\alpha_2} d_{\alpha_3} d_{\alpha_5} d_{\alpha_6}$$

$$d_{\beta_4} d_{\beta_2} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} d_{\beta_3} d_{\beta_6} d_{\beta_2} d_{\beta_1} d_{\beta_5} d_{\beta_3} d_{\beta_4} d_{\beta_6} d_{\beta_2} d_{\beta_7} d_{\beta_3} d_{\beta_5} d_{\beta_1} d_{\beta_6} d_{\beta_3} d_{\beta_7} d_{\beta_5} d_{\beta_3} d_{\beta_6} d_{\beta_2} d_{\beta_4} : -1$$

Ссылки

Коды всех программ, использованных в этой работе можно найти здесь:
<https://github.com/AleksandraSonina/Diploma.git>

Список литературы

- [1] H.Duan, X.Zhao *Algorithm for multiplying Schubert classes* International Journal of Algebra and Computation Vol. 16, No. 6 (2006) 1197–1210
- [2] Julianna S. Tymoczko, *An introduction to equivariant cohomology and homology, following Goresky, Kottwitz, and MacPherson*, arXiv:math/0503369v1 [math.AG] 17 Mar 2005.
- [3] Julianna S. Tymoczko, *Divided difference operators for partial flag varieties*, arXiv:math/0912.2545v1 [math.AG] 13 Dec 2009.
- [4] M. Brion. *Equivariant Chow groups for torus actions. Transformation Groups*, Vol. 2, No. 3, 1997, pp. 225-267.
- [5] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. math. 131, (1998).
- [6] H. Hiller, *Geometry of Coxeter groups*, 1982
- [7] A.Ruzzi *Geometrical description of smooth projective symmetric varieties with Picard number one* Transformation Groups, Vol.15, No.1, 2010, pp.201– 226
- [8] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [9] H.Duan, X.Zhao *The Chow Rings of Generalized Grassmannians* Found Comput Math (2010) 10: 245–274
- [10] Eugene Plotkin, Andrei Semenov, Nikolai Vavilov *Visual basic representations an atlas*